MỘT SỐ CÁCH TIẾP CẬN BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN

Nguyễn Văn Quang[15], Lê Đại Nghiệp[16]

Tóm tắt: *Trong bài báo này, chúng tôi trình bày cách tìm đường đi ngắn nhất từ điểm A đến điểm B trong không gian bằng 3 hướng tiếp cận:*

- *Cách thứ 1: Quy đổi từ bài toán trong không gian về bài toán trong mặt phẳng.*
- *Cách thứ 2: Sử dụng bất đẳng thức véc tơ.*
- *Cách thứ 3: Sử dụng ứng dụng của đạo hàm.*

Từ khóa: *Không gian Euclide 3 chiều, bất đẳng thức véc tơ, ứng dụng của đạo hàm*

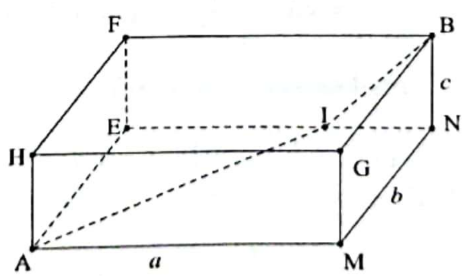
Abstract: *In this article, we present some ways to find the shortest path from a point A to a point B in a 3-dimensional Euclidean space by using three approaches:*

- *Transform the problem in a 3-dimensional Euclidean space into a problem ina 2-dimensional Euclidean space.*
- *By using vector inequality.*
- *By using applications of derivative.*

Keywords: *3-dimensional Euclidean space, vector inequality, applications of derivative*

A. BÀI TOÁN

Trong không gian cho hình hộp chữ nhật với ba kích thước $a,b,c>0$, như hình vẽ bên dưới. Hãy tìm vị trí điểm I trên đoạn NE để tổng khoảng cách $AI+IB$ nhỏ nhất.



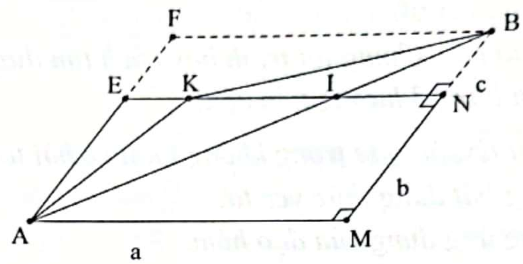
[15] Tiến sĩ - Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Nam Cần Thơ

[16] Thạc sĩ - Trường Đại học Nam Cần Thơ

B. GIẢI BÀI TOÁN

1) Cách giải thứ nhất: Quy đổi từ bài toán trong không gian về bài toán trong mặt phẳng.

Giả sử quy đổi mặt phẳng đứng $NBFE$ trở về nằm ngang, nối tiếp mặt phẳng ngang $AMNE$ (như hình vẽ) để được hình chữ nhật $AMBF$ các cạnh là a và $b+c$.



Gọi K là một điểm bất kỳ trên đoạn NE thì $AK+KB \geq AB$. Do đó, $AK+KB$ nhỏ nhất thì $AK+KB=AB$, nghĩa là, A, K, B thẳng hàng. Khi đó, I là giao điểm của NE và AB.

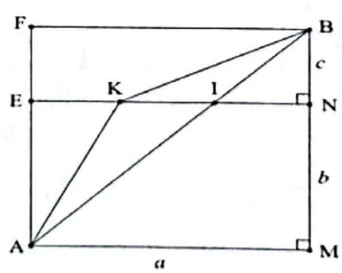
Theo định lý Thales:

$$\frac{BN}{BM}=\frac{NI}{MA}=\frac{c}{b+c} \Rightarrow IN=\frac{ac}{b+c};\ IE=\frac{ab}{b+c}.$$

Điểm $I \in NE$ được xác định bởi $IN=\dfrac{ac}{b+c}$; $IE=\dfrac{ab}{b+c}$.

Một cách quy đổi tương tự như sau: Quy đổi mặt phẳng nằm ngang $AMNE$ trở thành mặt phẳng đứng nối tiếp mặt phẳng $NBFE$ để được hình chữ nhật $AMBF$ (như hình vẽ) có các cạnh là a và $b+c$.

Lý luận tương tự như trên ta vẫn có I là giao điểm của NE và AB được xác định bởi $IN=\dfrac{ac}{b+c}$; $IE=\dfrac{ab}{b+c}$.



2) Cách giải thứ hai: Sử dụng bất đẳng thức véc tơ.

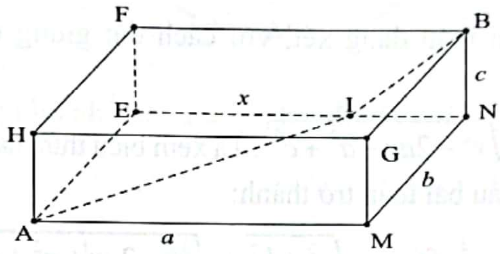
Trước hết, ta nhắc lại một bất đẳng thức véc tơ quen thuộc sau đây:

Cho 2 véc tơ $\vec{u},\vec{v}$. *Khi đó:* $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$. (*)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ *cùng chiều.*

Bây giờ ta trở lại bài toán đã xét ở trên.

Đặt $IE = x;\ IN = a - x\ (0 \le x \le a)$. Khi đó: $AI + IB = \sqrt{b^2+x^2} + \sqrt{c^2+(a-x)^2}$.



Đặt $\vec{u} = (b,x) \Rightarrow \left|\vec{u}\right| = \sqrt{b^2+x^2}$, $\vec{v} = (c, a-x) \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \sqrt{c^2+(a-x)^2}$,

$$\vec{u}+\vec{v} = (b+c, a) \Rightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right| = \sqrt{(b+c)^2+a^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (*), ta có:

$$AI + IB = \sqrt{b^2+x^2} + \sqrt{c^2+(a-x)^2} \ge \sqrt{(b+c)^2+a^2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x = \frac{ab}{b+c}$.

Vì $\frac{b}{b+c} < 1$ nên $\frac{ab}{b+c} < a$. Do đó, $0 < x = \frac{ab}{b+c} < a$.

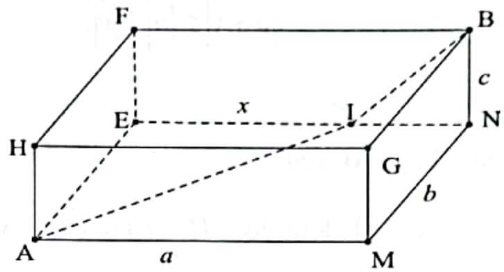
Vậy điểm I được xác định bởi $IE = \frac{ab}{b+c}$; $IN = \frac{ac}{b+c}$.

3) Cách giải thứ ba: Sử dụng ứng dụng của đạo hàm.

Trước hết, ta nhắc lại một số kết quả quen thuộc sau đây:

i. *Cho hàm số* $y = f(x)$ *liên tục, có đạo hàm trong* $(a;b)$ *và không có điểm dừng trong* $(a;b)$. *Khi đó,* $f'(x)$ *không đổi dấu trong* $(a;b)$.

ii. *Trong* $(a;b)$ *hàm số chỉ có 1 cực tiểu thì giá trị cực tiểu là giá trị nhỏ nhất của hàm số trong* $(a;b)$.



Bây giờ ta trở lại bài toán đang xét, với cách đặt giống như trong cách giải thứ 2, ta cũng được:

$IA + IB = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + c^2}$. Ta xem biểu thức này là một hàm số theo biến x với $0 \le x \le a$. Khi đó yêu cầu bài toán trở thành:

Tìm $x \in [0; a]$ để hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + c^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \dfrac{x - a}{\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + c^2}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \dfrac{x - a}{\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + c^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \dfrac{a - x}{\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + c^2}}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + c^2} = (a - x)\sqrt{x^2 + b^2}$

$\Leftrightarrow (b^2 - c^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = 0.$ (1)

* Nếu $b = c$ thì $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Ta có: $f'\left(\dfrac{a}{4}\right) = \dfrac{\dfrac{a}{4}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{16} + b^2}} - \dfrac{\dfrac{3a}{4}}{\sqrt{\dfrac{9a^2}{16} + b^2}} = \dfrac{\dfrac{a}{4}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{16} + b^2}} - \dfrac{\dfrac{a}{4}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{16} + \dfrac{b^2}{9}}} < 0.$

Suy ra $f'(x) < 0$, $\forall x \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$, (theo i)

Tương tự, ta cũng tính được $f'\left(\dfrac{3a}{4}\right) > 0$ suy ra $f'(x) > 0$, $\forall x \in \left(\dfrac{a}{2}; a\right)$, (theo i)

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3a}{4}$	a	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$		
y			↘	*Min*	↗		

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\frac{a}{2}$, khi đó $IN=IE=\frac{a}{2}$, (theo ii).

* Nếu $b<c$ thì

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{ab}{b-c}<0\ (\text{L})\\ x=\dfrac{ab}{b+c}=a.\dfrac{b}{b+c}<a.1=a\ (\text{N})\end{array}\right..$$

Do $b<c\Rightarrow b+b<b+c\Rightarrow 2b<b+c\Rightarrow\frac{ab}{2b}>\frac{ab}{b+c}\Leftrightarrow\frac{a}{2}>\frac{ab}{b+c}$.

Khi đó, $f'\left(\frac{a}{2}\right)=\dfrac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}}-\dfrac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+c^2}}>0.$

Suy ra: $f'(x)>0$, $\forall x\in\left(\frac{ab}{b+c};a\right)$, (theo i). Và tương tự, ta có $f'(x)<0$, $\forall x\in\left(0;\frac{ab}{b+c}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{ab}{b-c}$	0		$\frac{ab}{b+c}$	$\frac{a}{2}$	a	$+\infty$
y'				$-$	0	$+$		
y				↘	*Min*	↗		

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{ab}{b+c}$, khi đó $IE = \frac{ab}{b+c}$; $IN = \frac{ac}{b+c}$, (theo ii).

* Nếu $b > c$ thì

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{ab}{b-c} > a \text{ (L) } do \frac{b}{b-c} > 1 \\ x = \frac{ab}{b+c} = a.\frac{b}{b+c} < a.1 = a \text{ (N)} \end{array}\right. .$$

Do $b > c \Rightarrow b+b > b+c \Rightarrow 2b > b+c \Rightarrow \frac{ab}{2b} < \frac{ab}{b+c} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < \frac{ab}{b+c}$.

Lý luận hoàn toàn giống như trên, ta cũng có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{a}{2}$	$\frac{ab}{b+c}$		a	$\frac{ab}{b-c}$	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$			
y			$\searrow$	Min	$\nearrow$			

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{ab}{b+c}$, khi đó $IE = \frac{ab}{b+c}$; $IN = \frac{ac}{b+c}$, (theo ii).

C. Kết luận

Qua 3 cách giải trên, cách thứ 1 qui đổi về cùng một mặt phẳng; cách thứ 2 sử dụng bất đẳng thức véc tơ; cách thứ 3 sử dụng ứng dụng của đạo hàm, chúng ta vẫn tìm được duy nhất điểm $I \in NE$, với $IE = \frac{ab}{b+c}; IN = \frac{ac}{b+c}$, thỏa mãn yêu cầu bài toán đặt ra.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phan Huy Khải (2009), *Bất đẳng thức và ứng dụng*, Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam.

[2] Nguyễn Đình Trí (2006), *Toán học cao cấp, tập 2*, Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam.