

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC NAM CẦN THƠ



BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CẤP CƠ SỞ

SỰ ĐẠT CHỈNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU TẬP

Mã số: C24.28

Chủ nhiệm đề tài: ThS. TRẦN THỊ TUYẾT MAI

Thành viên: GS. TS LÂM QUỐC ANH

Cần Thơ, tháng 06 năm 2025

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC NAM CẦN THƠ



BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CẤP CƠ SỞ

SỰ ĐẠT CHÍNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU TẬP

Mã số: C24.28

Chủ nhiệm đề tài: ThS. TRẦN THỊ TUYẾT MAI

Thành viên: GS. TS LÂM QUỐC ANH

Cần Thơ, tháng 06 năm 2025

DANH SÁCH THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI

1. ThS. Trần Thị Tuyết Mai (Khoa Cơ bản – Trường Đại học Nam Cần Thơ)
2. GS. TS. Lâm Quốc Anh (Trường Sư phạm – Đại học Cần Thơ)

MỤC LỤC

MỤC LỤC.....	i
DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT VÀ KÝ HIỆU	ii
DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ	iii
THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU.....	iv
TÓM LƯỢC.....	xi
PHẦN 1. MỞ ĐẦU.....	1
1.1 TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC.....	1
1.2 TÍNH CẤP THIẾT	5
1.3 MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU.....	8
1.4 NỘI DUNG NGHIÊN CỨU	8
1.5 PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU	9
1.6 ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU.....	11
PHẦN 2. PHƯƠNG PHÁP VÀ PHƯƠNG TIỆN.....	12
NGHIÊN CỨU.....	12
2.1 PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU CHI TIẾT	12
2.2 PHƯƠNG TIỆN NGHIÊN CỨU.....	14
PHẦN 3 KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU	29
3.1 GIỚI THIỆU	29
3.2 MỞ ĐẦU.....	37
3.3 VÔ HƯỚNG HÓA VÀ SỰ ĐẶT CHỈNH CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU TẬP	40
PHẦN 4 KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	47
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	52

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT VÀ KÝ HIỆU

$A \subset X$	A là tập con của X
$F: X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y
$\text{dom}F$	miền hiệu quả của F
F^{-1}	ánh xạ ngược của F
$\text{gr}F$	đồ thị của F
$H\text{-usc}$	nửa liên tục trên theo nghĩa Hausdorff
$H\text{-lsc}$	nửa liên tục dưới theo nghĩa Hausdorff
lsc	nửa liên tục dưới
usc	nửa liên tục trên
$\ x\ $	chuẩn của x
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực không âm
$d(a, B)$	khoảng cách từ a đến tập B
$\mathcal{H}(A, B)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A và B
$\emptyset$	tập hợp rỗng
$\text{diam}A$	đường kính của tập hợp A

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

Hình 1	Tập lỗi	Trang 17
Hình 2	Tập không lỗi	Trang 17
Hình 3	Đồ thị hàm số lỗi	Trang 18
Hình 4	Quan hệ thứ tự giữa hai tập	Trang 36

TRƯỜNG ĐẠI HỌC NAM CẦN THƠ

KHOA CƠ BẢN

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. THÔNG TIN CHUNG

- Tên đề tài: **Sự đặt chỉnh nghiệm của bài toán tối ưu tập**
- Mã số: C24.28
- Chủ nhiệm: Trần Thị Tuyết Mai
- Cơ quan: Khoa Cơ bản, Trường Đại học Nam Cần Thơ
- Thời gian thực hiện: từ 07/2024 đến 08/2025

2. MỤC TIÊU

- Khảo sát các mô hình bài toán tối ưu tập và các dạng nghiệm của chúng.
- Chứng minh được các điều kiện đặt chỉnh cho bài toán tối ưu tập.
- Đóng góp các kết quả cho chủ đề nghiên cứu và các kết quả này được công bố ở tạp chí Trường Đại học Nam Cần Thơ.

3. TÍNH MỚI VÀ SÁNG TẠO

Cách tiếp cận của chúng tôi khác biệt rõ rệt so với các nghiên cứu và kết quả trước đó, điều này giúp chúng tôi đạt được những phát hiện mới và độc đáo. Nhờ sự khác biệt trong phương pháp tiếp cận, chúng tôi đã có thể mở rộng phạm vi áp dụng của các kết quả nghiên cứu, mang lại những giải pháp hiệu quả cho những trường hợp mà các phương pháp và kết quả đã có trước đó không thể áp dụng hoặc không đem lại kết quả như mong muốn. Cụ thể hơn, trong khi các phương pháp trước đây có thể bị giới hạn bởi những giả thiết hoặc điều kiện

nhất định, cách tiếp cận của chúng tôi đã phá vỡ những giới hạn đó bằng cách sử dụng các công cụ và lý thuyết giảm nhẹ mới, cho phép chúng tôi giải quyết những bài toán trong các tình huống đa dạng hơn. Từ đó giúp chúng ta giảm được chi phí khảo sát mà vẫn đạt được kết quả mong muốn.

Cụ thể, đề tài đã mở rộng đối tượng nghiên cứu, thay vì chỉ tập trung vào bài toán tối ưu vector hoặc tối ưu tập cổ điển, đề tài khảo sát bài toán tối ưu tập với quan hệ thứ tự tập loại trên, một loại quan hệ thứ tự phức tạp và tổng quát hơn; giới thiệu và khai thác hàm Gerstewitz tổng quát cho tập hợp: mở rộng hàm Gerstewitz, vốn được sử dụng chủ yếu cho các bài toán tối ưu vector, thành dạng tổng quát áp dụng cho tập hợp trong không gian có thứ tự, giúp vô hướng hóa hiệu quả các bài toán tối ưu tập; thiết lập cầu nối giữa tối ưu tập và tối ưu vô hướng: bằng cách vô hướng hóa qua hàm Gerstewitz, đề tài đã liên kết các khái niệm đặt chính trong tối ưu tập với khái niệm đặt chính Tykhonov trong tối ưu vô hướng. Đây là hướng tiếp cận khác biệt so với phương pháp sử dụng các điều kiện về tính compact hoặc tính lồi thông thường.

Những kết quả mà chúng tôi đạt được không chỉ mở rộng hiểu biết lý thuyết trong lĩnh vực toán học ứng dụng mà còn có tiềm năng lớn trong việc giải quyết các bài toán tối ưu trong thực tiễn. Điều này đặc biệt quan trọng đối với những tình huống mà các kết quả đã có trước đây không thể cung cấp giải pháp tối ưu hoặc không thể đáp ứng các yêu cầu cụ thể của bài toán.

Do đó, có thể nói rằng các kết quả của chúng tôi không chỉ là mới mẻ mà còn rất thực tiễn và hiệu quả. Chúng tôi tin rằng những kết quả này sẽ mở ra nhiều hướng nghiên cứu và ứng dụng mới, giúp cải thiện và phát triển các phương pháp giải quyết bài toán tối ưu trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Những cải tiến và phát triển này không chỉ dừng lại ở lý thuyết mà còn có thể được chuyển hóa thành các giải pháp thực tế, mang lại lợi ích lớn cho khoa học và công nghệ.

4. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Nội dung của đề tài này nghiên cứu tính đặt chỉnh tại điểm và toàn cục cho các bài toán tối ưu tập liên quan đến quan hệ thứ tự tập hợp loại trên. Chúng tôi đã phát triển phương pháp vô hướng hóa phi tuyến sử dụng hàm Gerstewitz tổng quát, từ đó xây dựng cầu nối giữa bài toán tối ưu tập và bài toán tối ưu vô hướng.

Trong phần đầu, trình bày các khái niệm cơ sở như tập lồi, nón, các loại quan hệ thứ tự giữa tập hợp, và định nghĩa hàm Gerstewitz mở rộng. Qua đó, tôi đề xuất hai dạng dãy cực tiểu cho bài toán tối ưu tập: dãy cực tiểu và dãy cực tiểu tổng quát, cùng các khái niệm đặt chỉnh tương ứng.

Bằng việc áp dụng hàm Gerstewitz để vô hướng hóa, đề tài cũng đã thiết lập được các điều kiện tương đương: bài toán tối ưu tập đạt tính đặt chỉnh tại một nghiệm hữu hiệu Pareto nếu và chỉ nếu bài toán tối ưu vô hướng hóa đạt đặt chỉnh Tykhonov. Tương tự, tính đặt chỉnh toàn cục của bài toán tối ưu tập cũng tương đương với đặt chỉnh Tykhonov tổng quát.

Một điểm nổi bật của nghiên cứu là việc giảm nhẹ các giả thiết so với các nghiên cứu trước, chẳng hạn không yêu cầu tập nghiệm hữu hiệu phải luôn khác rỗng. Phương pháp tiếp cận của bài báo có tính mới, góp phần hoàn thiện lý thuyết về tính đặt chỉnh cho bài toán tối ưu tập.

Kết quả nghiên cứu mở ra hướng phát triển tiếp theo cho việc khảo sát đặt chỉnh dưới các dạng quan hệ thứ tự khác hoặc trong bối cảnh bài toán có tham số thay đổi, đồng thời gợi ý ứng dụng thực tế trong các bài toán tối ưu đa mục tiêu và điều khiển.

Đặc biệt, chúng tôi thấy rằng các kết quả này có thể được mở rộng để nghiên cứu và giải quyết các bài toán tối ưu khác như bài toán tối ưu đa mục tiêu, nơi có nhiều hàm mục tiêu cần được tối ưu hóa đồng thời. Các bài toán tối

ưu với yếu tố không chắc chắn, nơi các tham số của bài toán không được biết chính xác mà chỉ được biết trong một khoảng giá trị nào đó, cũng là một hướng nghiên cứu tiềm năng. Hơn nữa, các bài toán cân bằng, vốn rất phổ biến trong kinh tế học và các lĩnh vực khác, cũng có thể được cân nhắc xem xét từ các kết quả nghiên cứu này.

Tóm lại, nghiên cứu của chúng tôi không chỉ góp phần làm sáng tỏ các khía cạnh lý thuyết quan trọng mà còn mở ra nhiều hướng ứng dụng và nghiên cứu mới, hứa hẹn đem lại nhiều kết quả có ý nghĩa trong cả lý thuyết và thực tiễn.

5. SẢN PHẨM

- Một bài báo đăng ở Tạp Chí Khoa Học và Kinh tế phát triển của Đại học Nam Cần Thơ (ISSN: 2588 - 1272).

6. HIỆU QUẢ, PHƯƠNG THỨC CHUYỂN GIAO KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ KHẢ NĂNG ÁP DỤNG

- Góp phần xây dựng và thúc đẩy mạnh mẽ phong trào học tập, nhằm nâng cao trình độ chuyên môn và nghiệp vụ của đội ngũ giảng viên tại Trường Đại học Nam Cần Thơ. Phong trào này không chỉ khuyến khích giảng viên tham gia các khóa đào tạo, hội thảo chuyên môn, mà còn tạo động lực cho họ không ngừng tự học, tự nghiên cứu để cải thiện và nâng cao kiến thức, kỹ năng của mình.

- Nâng cao năng lực nghiên cứu khoa học cơ bản của Trường Đại học Nam Cần Thơ, giúp trường từng bước khẳng định vị thế của mình so với các trường đại học khác trong khu vực về chất lượng nghiên cứu và đào tạo. Điều này bao gồm việc tạo điều kiện thuận lợi cho giảng viên và sinh viên tham gia vào các dự án nghiên cứu khoa học, cung cấp cơ sở vật chất hiện đại, hỗ trợ tài

chính cho các đề tài nghiên cứu, và xây dựng một môi trường học thuật cởi mở, sáng tạo.

- Các kết quả nghiên cứu không chỉ được công bố trên các tạp chí khoa học uy tín trong nước, mà còn trở thành nguồn tài liệu tham khảo quý báu và hữu ích cho sinh viên trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học. Những công trình nghiên cứu này giúp sinh viên có cơ hội tiếp cận với những kiến thức mới nhất, nâng cao khả năng tư duy phản biện, và ứng dụng các kết quả nghiên cứu vào thực tiễn, từ đó góp phần nâng cao chất lượng đào tạo của nhà trường. Cụ thể như sau:

- Về hiệu quả của kết quả nghiên cứu

Góp phần làm rõ bản chất của tính đặt chỉnh trong tối ưu hóa tập hợp, vốn còn khá mới mẻ và chưa được nghiên cứu đầy đủ.

Xây dựng cầu nối tự nhiên giữa bài toán tối ưu tập và bài toán tối ưu vô hướng thông qua hàm Gerstewitz tổng quát, giúp đơn giản hóa phân tích bài toán tối ưu tập phức tạp.

Mở rộng khả năng ứng dụng lý thuyết đặt chỉnh vào các mô hình tối ưu với giả thiết nhẹ hơn, giảm yêu cầu về sự đầy đủ hoặc tính chất compact của tập nghiệm hữu hiệu.

- Về hiệu quả thực tiễn

Làm cơ sở lý thuyết để xây dựng các thuật toán giải bài toán tối ưu tập ổn định và có khả năng hội tụ tốt.

Hỗ trợ các bài toán tối ưu đa mục tiêu trong kinh tế, tài chính, điều khiển học với cấu trúc mục tiêu không đơn thuần là số thực, mà là tập hợp.

- Về phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu

Kết quả nghiên cứu được thể hiện dưới dạng bài báo khoa học, có thể gửi đăng trên các tạp chí trong nước chuyên ngành Tối ưu hóa, Toán ứng dụng hoặc Khoa học dữ liệu.

Xây dựng các khóa luận, đề tài cao học phát triển lý thuyết hoặc mở rộng ứng dụng kết quả.

Tích hợp vào bài giảng về tối ưu hóa, giải tích đa trị, hoặc các chuyên đề chuyên sâu trong chương trình đào tạo ngành Toán ứng dụng, Kỹ thuật, Công nghệ thông tin.

Hợp tác phát triển phần mềm tối ưu hóa tập hợp, đưa lý thuyết vào các công cụ mô phỏng, hỗ trợ ra quyết định đa mục tiêu.

- Về khả năng áp dụng trong thực tiễn

Dùng làm nền tảng lý thuyết cho học viên cao học, sinh viên ngành Toán học, Khoa học dữ liệu, Kỹ thuật tối ưu hóa.

Tối ưu tài chính: phân bổ danh mục đầu tư khi rủi ro và lợi nhuận được mô hình hóa dưới dạng tập hợp.

Kỹ thuật và công nghiệp: thiết kế tối ưu nhiều mục tiêu (ví dụ: tối ưu hóa độ bền, chi phí, trọng lượng đồng thời).

Điều khiển học: bài toán tối ưu tập khi trạng thái hệ thống được mô hình bởi tập tham số.

Trí tuệ nhân tạo và khoa học dữ liệu: bài toán tối ưu tập trong học máy nhiều mục tiêu.

Nhìn chung, kết quả nghiên cứu có ý nghĩa lý thuyết sâu sắc, khả năng ứng dụng thực tiễn cao, và phương thức chuyển giao linh hoạt qua công bố, đào tạo, và phát triển phần mềm. Định hướng áp dụng trải rộng từ giáo dục, nghiên cứu đến tài chính, kỹ thuật và khoa học dữ liệu.

Cần Thơ, tháng 06 năm 2025

Xác nhận của khoa

Chủ nhiệm đề tài

Nguyễn Chí Thắng

Trần Thị Tuyết Mai

TÓM LƯỢC

Trong đề tài này, chúng tôi nghiên cứu về tính đặt chỉnh toàn cục và đặt chỉnh tại điểm cho các bài toán tối ưu tập liên quan đến quan hệ thứ tự tập hợp loại trên. Chúng tôi xem xét các hàm Gerstewitz tổng quát cho các tập hợp liên quan đến quan hệ thứ tự tập và nghiên cứu một số tính chất của chúng. Sử dụng các hàm này, chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ giữa các khái niệm đặt chỉnh toàn cục và đặt chỉnh tại điểm của các bài toán tối ưu tập và các bài toán tối ưu vô hướng tương ứng.

ABSTRACT

In this research we study the pointwise and global well-posedness for set optimization problems with respect to the upper type set ordered relation. We consider generalized Gerstewitz functions for sets concerning the reference set ordered relation, and study several properties of such functions. Using these functions, we investigate relationships between pointwise and global well-posedness notions of set optimization problems and the corresponding scalarization optimization problems.

PHẦN 1. MỞ ĐẦU

1.1 TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC

Trong bối cảnh toàn cầu hóa và chuyển đổi số đang diễn ra với tốc độ chưa từng có, công nghệ thông tin, tự động hóa và các mô hình tính toán hiện đại đã len lỏi vào gần như mọi ngóc ngách của đời sống xã hội. Các lĩnh vực truyền thống như sản xuất, thương mại, vận tải, y tế, giáo dục... đang tái cấu trúc mạnh mẽ nhờ vào sự hỗ trợ của các công cụ số hóa, trí tuệ nhân tạo và phân tích dữ liệu lớn. Trong quá trình này, toán học – đặc biệt là toán ứng dụng – đóng vai trò như một cột lõi hạ tầng tư duy để mô hình hóa, mô phỏng, tối ưu hóa và ra quyết định trong các hệ thống phức tạp. Một trong những nhánh quan trọng và có ảnh hưởng sâu sắc nhất của toán ứng dụng hiện đại là lý thuyết tối ưu, bởi khả năng cung cấp các nguyên lý và phương pháp để lựa chọn phương án tốt nhất trong điều kiện có nhiều ràng buộc, bất định hoặc xung đột mục tiêu.

Ngày nay, các mô hình tối ưu hóa hiện đại không còn giới hạn trong khuôn khổ tuyến tính, lồi hoặc khả vi như trước đây. Thực tiễn đã và đang đặt ra nhu cầu phải xử lý những bài toán có tính phi tuyến, không lồi, không xác định đơn trị hoặc có nhiều tiêu chí mâu thuẫn, chẳng hạn như trong kinh tế học hành vi, học máy hiện đại, mạng lưới phân tán, hệ thống đa tác tử,... Đặc biệt, khi dữ liệu đầu vào không chắc chắn hoặc có nhiều đầu ra khả dĩ, việc sử dụng các hàm mục tiêu nhận giá trị là các tập hợp trở thành một xu hướng tất yếu. Từ nhu cầu đó đã hình thành một nhánh mở rộng quan trọng của lý thuyết tối ưu hiện đại, gọi là bài toán tối ưu tập (set optimization).

Khác với các bài toán tối ưu cổ điển, trong bài toán tối ưu tập, ánh xạ mục tiêu không còn là một hàm số thực hay véc tơ, mà là một ánh xạ giá trị tập, tức

là mỗi đầu vào sẽ tương ứng với một tập hợp các giá trị đầu ra. Mục tiêu không còn là tìm giá trị cực tiểu hay cực đại của một đại lượng cụ thể, mà là xác định các phần tử tối ưu theo một quan hệ thứ tự định nghĩa trên tập các tập hợp, thường dựa trên bao hàm theo hình nón, quan hệ phủ định hoặc thứ tự Pareto. Cách mô hình hóa này cho phép bao quát nhiều tình huống thực tế, ví dụ như: các chiến lược ra quyết định với đầu ra không duy nhất, các mô hình lựa chọn thay thế có nhiều tiêu chí, các thị trường tài chính có nhiều trạng thái rủi ro song hành, hay các mô hình học máy có đầu ra là tập các miền phân loại.

Nhờ vào tính linh hoạt đó, tối ưu tập đã trở thành một công cụ lý tưởng để mô hình hóa trong nhiều lĩnh vực: từ tài chính định lượng – như quản lý danh mục đầu tư trong điều kiện biến động và rủi ro đa chiều; lý thuyết trò chơi – nơi chiến lược tối ưu của một người chơi phụ thuộc vào phản ứng của đối thủ; điều khiển hệ thống – với đầu ra phản ứng của hệ thống là một tập nhiều trạng thái; đến học máy – trong đó các mô hình phân loại có thể cho ra tập nghiệm thay vì một nhãn duy nhất. Ngoài ra, tối ưu tập còn được ứng dụng hiệu quả trong các bài toán logistics, điều phối tài nguyên, lựa chọn chính sách công, hoặc thiết kế sản phẩm theo nhiều tiêu chí.

Về mặt lý thuyết, hai hướng tiếp cận chính đã được phát triển để nghiên cứu bài toán tối ưu tập. Hướng thứ nhất là tiếp cận theo véc tơ, trong đó bài toán được quy về tối ưu hóa đa mục tiêu bằng cách xác định các phần tử Pareto cực trị trong tập giá trị ảnh. Hướng này cho phép tận dụng các kết quả sẵn có trong lý thuyết tối ưu véc tơ và các kỹ thuật tính toán đa mục tiêu. Hướng thứ hai là tiếp cận theo tập hợp, do Kuroiwa khởi xướng, trong đó ánh xạ mục tiêu được xét như một ánh xạ giá trị tập và so sánh trực tiếp các tập giá trị đầu ra thông qua các quan hệ thứ tự định nghĩa trên không gian các tập con. Phương pháp này cho phép phát triển các khái niệm mới về liên tục, lỗi, đơn điệu,... cho các

ánh xạ tập, đồng thời mở rộng lý thuyết tối ưu vào các không gian phi tuyến, không khả vi và đa trị.

Trong bối cảnh đó, tính đặt chỉnh (well-posedness) của bài toán tối ưu tập trở thành một yếu tố trung tâm, phản ánh tính ổn định, độ nhạy và khả năng hội tụ nghiệm của bài toán khi có nhiễu nhỏ hoặc thay đổi trong dữ liệu đầu vào. Về mặt ứng dụng, nếu bài toán không đặt chỉnh thì việc giải bằng thuật toán sẽ trở nên không ổn định hoặc không đáng tin cậy, khiến cho kết quả không thể đưa vào thực tiễn. Do đó, nghiên cứu các điều kiện đủ hoặc cần và đủ để đảm bảo bài toán tối ưu tập là đặt chỉnh – cả tại điểm và toàn cục – đã và đang là một hướng phát triển chủ đạo trong lý thuyết tối ưu hiện đại.

Các nghiên cứu tiên phong về tính đặt chỉnh trong tối ưu tập khởi nguồn từ công trình của Zhang và cộng sự (xem [20]), trong đó các khái niệm đặt chỉnh tại điểm được đưa ra trong khung ánh xạ giá trị tập mà không yêu cầu giả thiết compact hay hình nón đóng. Tiếp theo, nhiều nhà nghiên cứu đã mở rộng và khái quát các kết quả này bằng cách áp dụng kỹ thuật vô hướng hóa (scalarization) – đặc biệt là sử dụng các hàm vô hướng hóa Gerstewitz phi tuyến dựa trên các hình nón định hướng (xem [6]). Các công trình của Long và Peng (xem [17]) đã thiết lập các đặc trưng cần và đủ cho tính đặt chỉnh toàn cục, mở ra khả năng xây dựng các định lý hội tụ và phát triển thuật toán hiệu quả cho bài toán tối ưu tập. Gần đây, các hướng nghiên cứu về Tykhonov-well-posedness và B-well-posedness đã được mở rộng, làm sáng tỏ hơn nữa mối quan hệ giữa tính ổn định trong không gian tập và các tiêu chuẩn đặt chỉnh cổ điển trong tối ưu vô hướng.

Nghiên cứu này tập trung khảo sát sự tương đương giữa tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu tập và tính đặt chỉnh Tykhonov của bài toán tối ưu vô hướng tương ứng. Cách tiếp cận này không chỉ tận dụng được kho tàng kết quả lý thuyết đã có trong tối ưu vô hướng, mà còn mở rộng nó vào không gian hàm

mục tiêu đa trị, nơi tính ổn định trở nên phức tạp hơn do thiếu cấu trúc tuyến tính hoặc compact. Phương pháp này đồng thời tạo ra cầu nối lý thuyết giữa hai hướng nghiên cứu tưởng chừng như tách biệt, cho phép tái sử dụng công cụ phân tích hiện có và tạo nền tảng cho các thuật toán xấp xỉ.

Ở Việt Nam, các nhà nghiên cứu như PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà và cộng sự đã có nhiều đóng góp trong việc xây dựng các mô hình tối ưu có hàm mục tiêu giá trị tập, với các điều kiện tồn tại nghiệm, tính chất cực trị và tính lồi theo nón được phát triển bài bản (xem [13]). Đồng thời, hướng nghiên cứu dựa trên định lý điểm bất động Ky Fan, được GS. TS. Phạm Hữu Sách triển khai, đã giúp mở rộng điều kiện tồn tại nghiệm cho các bài toán có cấu trúc song hàm và giá trị tập, từ đó tạo nền tảng cho các mô hình trong điều khiển, phân tích dữ liệu và kiểm định chất lượng (xem [21]).

Tóm lại, tối ưu tập là một lĩnh vực đang phát triển mạnh mẽ với nhiều tiềm năng cả về lý thuyết lẫn ứng dụng. Trong bối cảnh hiện đại hóa và số hóa toàn diện, nhu cầu ra quyết định tối ưu trong điều kiện đa mục tiêu, phi tuyến và bất định ngày càng trở nên phổ biến. Việc nghiên cứu tính đặt chỉnh, đặc biệt thông qua kỹ thuật vô hướng hóa và liên kết với các khái niệm đặt chỉnh cổ điển, sẽ góp phần hoàn thiện lý thuyết tối ưu tập và thúc đẩy ứng dụng của nó vào các bài toán thực tiễn phức tạp. Những kết quả đạt được sẽ là nền tảng để mở rộng nghiên cứu sâu hơn về tính liên tục, tính ổn định và khả năng xây dựng thuật toán hiệu quả trong thế kỷ 21.

Hiện nay ở Việt Nam có rất nhiều tổ chức khoa học nghiên cứu về tối ưu phát triển rất mạnh như:

- Phòng Tối ưu và điều khiển, Viện Toán học,
- Bộ môn Toán ứng dụng, Khoa Toán - Tin học, Đại học Sư phạm Hà Nội,

- Bộ môn Toán ứng dụng, Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế,
- Tổ Toán ứng dụng, Khoa Toán, Đại học Quy Nhơn,
- Bộ môn Tối ưu và hệ thống, Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. HCM,
- Khoa Sư phạm Toán - Tin học, Trường Sư phạm và Bộ môn Toán học, Khoa Khoa học Tự nhiên thuộc Trường Đại học Cần Thơ,...

1.2 TÍNH CẤP THIẾT

Cùng với sự phát triển nhanh chóng và thâm nhập sâu rộng của công nghệ số trong mọi mặt của đời sống, từ kinh tế, xã hội đến giáo dục và công nghiệp, toán học ứng dụng ngày càng khẳng định vai trò không thể thiếu trong việc mô hình hóa, phân tích và giải quyết các vấn đề thực tiễn. Trong đó, lý thuyết tối ưu luôn giữ vai trò nòng cốt, cung cấp cơ sở toán học cho việc đưa ra các quyết định tối ưu trong điều kiện có nhiều ràng buộc, không chắc chắn và đa mục tiêu. Khi các hệ thống ngày càng trở nên phức tạp và dữ liệu trở nên không đầy đủ hoặc có tính bất định, nhu cầu xây dựng các mô hình tối ưu hóa mạnh hơn, linh hoạt hơn và thực tế hơn là một xu thế tất yếu. Một trong những hướng tiếp cận như vậy là sử dụng các mô hình tối ưu với hàm mục tiêu nhận giá trị là tập hợp – còn gọi là bài toán tối ưu tập (set optimization problem). Trong khuôn khổ nghiên cứu này, chúng tôi tập trung khảo sát tính đặt chỉnh nghiệm của bài toán tối ưu tập – một khía cạnh quan trọng có liên quan trực tiếp đến khả năng áp dụng trong thực tiễn.

Tính đặt chỉnh (well-posedness) phản ánh mức độ ổn định của nghiệm khi có nhiễu nhỏ trong dữ liệu đầu vào. Đây là yếu tố then chốt để đảm bảo rằng các lời giải gần đúng từ các thuật toán số có thể tiệm cận đến nghiệm chính xác trong điều kiện lý tưởng. Trong bài toán tối ưu tập, khi hàm mục tiêu là ánh xạ

giá trị tập, việc định nghĩa và kiểm tra tính đặt chỉnh trở nên khó khăn hơn nhiều so với các bài toán tối ưu vô hướng hoặc tối ưu véc tơ truyền thống. Nhằm vượt qua rào cản này, chúng tôi khai thác mối liên hệ giữa tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu tập và tính đặt chỉnh Tykhonov của bài toán tối ưu vô hướng tương ứng. Cụ thể, thông qua việc áp dụng kỹ thuật vô hướng hóa, chúng tôi xây dựng một khung lý thuyết nhằm chuyển bài toán tối ưu tập về dạng vô hướng quen thuộc, qua đó tận dụng các tiêu chí đặt chỉnh đã được thiết lập trong nhiều thập kỷ qua.

Các chủ đề về vô hướng hóa và đặt chỉnh đã và đang nhận được sự quan tâm rộng rãi trong cộng đồng toán học tối ưu. Hằng năm, có hàng trăm công trình nghiên cứu liên quan đến các chủ đề này được công bố trên các tạp chí quốc tế uy tín như *Journal of Optimization Theory and Applications*, *Set-Valued and Variational Analysis*, *SIAM Journal on Optimization*, v.v. (xem [4], [10]). Những kết quả này không chỉ khẳng định tính thời sự, mà còn cho thấy rằng tính đặt chỉnh không đơn thuần là một vấn đề lý thuyết, mà còn có ảnh hưởng trực tiếp đến sự phát triển của các thuật toán giải và việc đảm bảo tính ổn định trong mô phỏng số và ra quyết định thực tiễn.

Trong lĩnh vực tối ưu hóa hiện đại, các mô hình bài toán không ngừng được đổi mới để phản ánh sát thực hơn các tình huống trong sản xuất, tài chính, điều khiển và học máy. Các mô hình cũ tuy hữu ích nhưng không đủ để bao quát những tình huống mới, có tính chất phức tạp và không đơn trị. Do đó, các bài toán tối ưu giá trị tập ngày càng được chú trọng. Tuy nhiên, lý thuyết đặt chỉnh cho lớp bài toán này vẫn còn đang trong quá trình hoàn thiện. Hầu hết các công trình trước đây chỉ tập trung vào đặt chỉnh cho các bài toán tối ưu vô hướng hoặc tối ưu véc tơ. Với các bài toán tối ưu tập – đặc biệt là dưới các quan hệ thứ tự tập hợp loại trên – việc xác định điều kiện đặt chỉnh vẫn còn là một thách thức. Lý do chính là do tính chất ánh xạ đa trị phức tạp, tính không lồi hoặc

không tuyến tính của không gian giá trị, và thiếu vắng các phương pháp vô hướng hóa đủ mạnh để giữ nguyên cấu trúc bài toán.

Để khắc phục khó khăn này, nghiên cứu của chúng tôi đề xuất một cách tiếp cận mới thông qua việc sử dụng hàm Gerstewitz tổng quát để vô hướng hóa bài toán tối ưu tập. Đây là một lớp hàm đặc biệt, cho phép biểu diễn các quan hệ thứ tự phức tạp giữa các tập hợp bằng cách ánh xạ chúng về không gian thực – nơi các công cụ phân tích tối ưu quen thuộc có thể được áp dụng. Bằng cách này, chúng tôi xây dựng được các tiêu chuẩn tương đương giữa tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu tập và tính đặt chỉnh Tykhonov của bài toán vô hướng tương ứng. Ưu điểm của phương pháp này là không đòi hỏi các giả thiết mạnh về tính lồi, compact hay liên tục đều của ánh xạ, từ đó tăng tính khái quát và ứng dụng rộng rãi cho nhiều mô hình trong thực tế.

Một điểm nổi bật của cách tiếp cận này là khả năng giảm nhẹ các điều kiện kỹ thuật vốn thường rất khắt khe trong các nghiên cứu trước. Thay vì yêu cầu ánh xạ giá trị tập phải nhận giá trị trong tập lồi đóng, hoặc yêu cầu ánh xạ nghiệm phải liên tục theo kiểu Hausdorff, phương pháp này cho phép khảo sát tính đặt chỉnh chỉ với các điều kiện tối thiểu như liên tục nửa dưới (lower semicontinuity) hoặc tồn tại chuỗi hội tụ trong không gian chức năng. Điều này đặc biệt quan trọng khi áp dụng vào các lĩnh vực thực tế như tối ưu hóa tài chính (quản lý rủi ro, danh mục đầu tư), điều khiển tối ưu trong hệ thống không tuyến tính, hoặc học máy (multi-output learning) – nơi dữ liệu và mô hình thường có cấu trúc không chuẩn.

Về mặt lý thuyết, đề tài góp phần mở rộng hệ thống hóa khung lý thuyết của tối ưu tập hiện đại. Nó bổ sung thêm vào kho tàng các tiêu chuẩn đặt chỉnh, liên kết trực tiếp với các khái niệm quen thuộc trong phân tích biến phân, ánh xạ đa trị và hàm mục tiêu bất định. Về mặt ứng dụng, các kết quả này tạo tiền đề cho việc xây dựng các thuật toán ổn định, có khả năng hội tụ tốt và ứng dụng trong

các phần mềm tối ưu thực tế, đặc biệt trong các bài toán có cấu trúc dữ liệu không xác định, biến động theo thời gian hoặc đa mục tiêu.

Vì vậy, đề tài nghiên cứu này có tính cấp thiết rất cao – cả về phương diện học thuật lẫn ứng dụng. Nó không chỉ góp phần hoàn thiện khung lý thuyết về tính đặt chỉnh cho các bài toán tối ưu tập – một lĩnh vực đang phát triển mạnh mẽ – mà còn mở ra hướng nghiên cứu mới trong việc kết nối chặt chẽ giữa tối ưu tập và tối ưu vô hướng thông qua kỹ thuật vô hướng hóa hàm Gerstewitz. Đồng thời, kết quả nghiên cứu cũng có thể được ứng dụng vào các bài toán ra quyết định đa mục tiêu trong môi trường bất định, phục vụ cho các lĩnh vực mũi nhọn như tài chính, kỹ thuật điều khiển, trí tuệ nhân tạo và khoa học dữ liệu hiện đại.

1.3 MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU

Khảo sát mô hình bài toán tối ưu tập và các dạng nghiệm của chúng.

Chứng minh được các điều kiện đặt chỉnh cho bài toán tối ưu tập.

Đóng góp các kết quả mới cho chủ đề nghiên cứu và các kết quả này được công bố ở tạp chí khoa học trong nước.

1.4 NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Đề tài tập trung khảo sát tính đặt chỉnh nghiệm của bài toán tối ưu tập theo các quan hệ thứ tự tập, bao gồm các nội dung nghiên cứu chính sau đây

- Nội dung 1: Nghiên cứu mô hình bài toán tối ưu tập và các dạng nghiệm hữu hiệu

- Nội dung 2: Nghiên cứu các tính chất của hàm vô hướng hóa phi tuyến dạng Gerstewitz

- Nội dung 3: Nghiên cứu điều kiện đặt chỉnh nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu tập.

1.5 PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Đề tài này được thực hiện trên cơ sở kết hợp nhiều phương pháp nghiên cứu lý thuyết hiện đại, với mục tiêu xây dựng một nền tảng lý luận vững chắc và phát triển các kết quả khoa học có tính mới, khả thi và phù hợp với thực tiễn. Cụ thể, chúng tôi đã áp dụng phương pháp phân tích – tổng hợp lý thuyết một cách chi tiết, sâu rộng và có hệ thống. Việc này được tiến hành thông qua việc thu thập, chọn lọc và phân tích có phê phán các công trình nghiên cứu đã công bố trước đó, bao gồm cả các bài báo khoa học quốc tế có uy tín và các chuyên khảo, giáo trình chuyên sâu liên quan đến tối ưu tập, ánh xạ giá trị tập, tính đặt chính và phương pháp vô hướng hóa. Việc sưu tầm được thực hiện với phạm vi bao quát, từ các công trình kinh điển đã đặt nền móng cho lý thuyết tối ưu tập đến các bài báo gần đây phản ánh các hướng nghiên cứu mới nhất trong lĩnh vực này. Trên cơ sở đó, chúng tôi thực hiện tổng hợp và phân loại các kết quả quan trọng, đồng thời đánh giá mức độ kế thừa và khoảng trống lý thuyết cần được tiếp tục nghiên cứu.

Bên cạnh việc phân tích lý thuyết, chúng tôi cũng triển khai phương pháp hệ thống hóa và phân loại học thuật, nhằm tái cấu trúc các kết quả đã có trong các hướng tiếp cận khác nhau (ví dụ: tiếp cận véc tơ, tiếp cận theo tập, tiếp cận theo ánh xạ phủ định, tiếp cận qua Gerstewitz scalarization, v.v.). Việc hệ thống hóa này đóng vai trò thiết yếu trong việc làm sáng tỏ mối quan hệ giữa các khái niệm tưởng chừng như rời rạc, đồng thời tạo cơ sở để đề xuất cách tiếp cận thống nhất và hiệu quả hơn cho bài toán tối ưu tập. Tiếp theo, chúng tôi áp dụng phương pháp mô hình hóa toán học để xây dựng lại các biểu diễn bài toán dưới dạng ánh xạ giá trị tập, xác định các quan hệ thứ tự thích hợp trên không gian tập mục tiêu, và từ đó phát triển các điều kiện vô hướng hóa tương ứng. Phương pháp mô hình hóa được thực hiện không chỉ ở cấp độ khái niệm, mà còn được

cụ thể hóa thông qua các công thức toán học, định nghĩa hình thức, và các biểu đồ minh họa cấu trúc bài toán.

Một bước quan trọng nhằm đảm bảo tính tin cậy và khả thi của các kết quả nghiên cứu là việc áp dụng phương pháp chuyên gia. Cụ thể, trong quá trình nghiên cứu, chúng tôi đã mời một số chuyên gia đầu ngành trong lĩnh vực tối ưu hóa và phân tích hàm để tham gia góp ý, phản biện và thẩm định học thuật cho các kết quả lý thuyết cũng như phương pháp tiếp cận mà đề tài đã sử dụng. Các buổi trao đổi học thuật chuyên sâu đã giúp phát hiện kịp thời các điểm chưa hợp lý, các giả thiết cần điều chỉnh hoặc bổ sung, đồng thời xác nhận tính đúng đắn của các lập luận toán học được đưa ra. Sự tham gia của các chuyên gia không chỉ mang lại góc nhìn khách quan mà còn đóng vai trò như một cơ chế kiểm soát chất lượng, nâng cao độ tin cậy cho các kết luận nghiên cứu của đề tài.

Ngoài ra, chúng tôi cũng tiến hành so sánh các kết quả đạt được với các nghiên cứu quốc tế hiện hành, từ đó đánh giá mức độ đóng góp, điểm mới và giới hạn của đề tài. Phân tích đối sánh này được thực hiện trên các tiêu chí như: tính khái quát, điều kiện giả thiết, mức độ khả thi của các định lý, và tính ứng dụng trong thực tiễn. Nhờ đó, đề tài không chỉ phát hiện và lấp đầy một số khoảng trống trong lý thuyết tối ưu tập, mà còn định vị được hướng phát triển mới cho các nghiên cứu tiếp theo trong lĩnh vực này.

Tóm lại, việc kết hợp đồng bộ giữa các phương pháp phân tích – tổng hợp, hệ thống hóa lý thuyết, mô hình hóa toán học và đánh giá chuyên gia đã tạo nên một nền tảng nghiên cứu toàn diện cho đề tài. Cách tiếp cận này vừa đảm bảo tính chặt chẽ về mặt toán học, vừa tăng cường khả năng ứng dụng thực tiễn – qua đó góp phần hoàn thiện lý thuyết tối ưu tập hiện đại và mở rộng khả năng ứng dụng trong các lĩnh vực liên quan như kỹ thuật, tài chính, điều khiển học và trí tuệ nhân tạo.

1.6 ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

1.6.1 Đối tượng nghiên cứu

Bài toán tối ưu tập.

Tính đặt chỉnh nghiệm của bài toán đang xét.

1.6.2 Phạm vi nghiên cứu

Bài toán tối ưu đa trị tiếp cận theo quan điểm tối ưu tập trong các không gian vector định chuẩn.