BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC NAM CẦN THƠ

GIÁO TRÌNH

TOÁN CAO CẤP 2

Khối ngành kỹ thuật

CHỦ BIÊN

TS. NGUYỄN VĂN QUANG

Cần Thơ, tháng 6 năm 2024

Lưu hành nội bộ

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC NAM CẦN THƠ

GIÁO TRÌNH

TOÁN CAO CẤP 2

Khối ngành kỹ thuật

CHỦ BIÊN: TS. NGUYỄN VĂN QUANG

THÀNH VIÊN BIÊN SOẠN:

Th.S NGUYỄN CHÍ THẮNG

Th.S TRẦN THỊ TUYẾT MAI

Th.S LÂM VĂN ĐẦY

Cần Thơ, tháng 6 năm 2024

Lưu hành nội bộ

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình Toán Cao cấp 2 là phần 2 của Bộ Giáo trình Toán Cao cấp. Giáo trình này dành cho sinh viên thuộc khối ngành kỹ thuật. Mục đích của giáo trình Toán Cao cấp 2 là giúp cho sinh viên nắm vững các kiến thức cơ bản và cần thiết về phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến; phương pháp giải một số phương trình vi phân thường. Những kiến thức được cung cấp trong học phần Toán Cao cấp 1 cùng với kiến thức trong Toán Cao cấp 2 là cơ sở quan trọng để sinh viên có thể nghiên cứu các môn học chuyên ngành khác có liên quan và có thể áp dụng để giải quyết một số bài toán trong thực tế. Giáo trình này là tài liệu học tập thiết thực đối với sinh viên đồng thời cũng là tài liệu giảng dạy đối với giảng viên Bộ môn Toán của Trường Đại học Nam Cần Thơ.

Giáo trình gồm 04 chương như sau: Chương 1: **Phép tính vi phân hàm nhiều biến**; Chương 2: **Tích phân bội**; Chương 3: **Tích phân đường và tích phân mặt**; Chương 4: **Phương trình vi phân**. Hầu hết nội dung của giáo trình Toán Cao cấp 2 sinh viên chưa được làm quen trong chương trình THPT, tuy nhiên nếu sinh viên nắm vững kiến thức của giáo trình Toán Cao cấp 1 thì các em sẽ tiếp thu kiến thức về hàm nhiều biến dễ dàng hơn.

Trong giáo trình này, các khái niệm, định nghĩa, định lý, công thức và kỹ thuật giải toán được phát biểu và trình bày một cách rõ ràng và có hệ thống. Một số định lý được chứng minh, một mặt để cung cấp kiến thức, một mặt giúp cho sinh viên học các kỹ thuật giải toán mới, các phương pháp chứng minh có thể sử dụng trong giải bài tập. Một số định lý mà việc chứng minh khá phức tạp, chúng tôi chỉ giới thiệu và yêu cầu sinh viên chấp nhận mà không cần chứng minh, chủ yếu làm thế nào để sinh viên hiểu và vận dụng vào giải bài tập. Cuối mỗi chương có phần bài tập để sinh viên tự rèn luyện. Các bài tập trong giáo trình có mức độ phức tạp khác nhau. Việc giới thiệu nhiều ứng dụng thực tế qua các ví dụ cùng với hệ thống bài tập khá đa dạng giúp cho sinh viên hiểu rõ hơn việc mô hình hóa các vấn đề thực tế thành các bài toán Toán học. Ngoài ra, trong giáo trình cũng có rất nhiều hình vẽ, chúng tôi đã sử dụng công cụ Geometer’s Sketchpad để vẽ các hình ảnh minh họa sinh động kèm theo các ví dụ nhằm giúp cho sinh viên dễ hiểu bài hơn.

Do thời lượng của học phần hạn chế nên một số vấn đề trong giáo trình không được trình bày một cách đầy đủ và tỉ mỉ như mong muốn. Sinh viên mong muốn tìm hiểu sâu hơn các vấn đề được trình bày trong giáo trình này có thể tìm đọc các tài liệu được giới thiệu trong mục "Tài liệu tham khảo".

Chúng tôi chân thành cám ơn quý Thầy, Cô, bạn bè, đồng nghiệp đã đọc và góp nhiều ý kiến quý báu cho chúng tôi trong quá trình biên soạn giáo trình này. Giáo trình tuy đã được chỉnh sửa nhưng vẫn khó tránh khỏi thiếu sót, rất mong tiếp tục nhận được góp ý của quí Thầy, Cô, bạn đồng nghiệp và các em sinh viên.

Nhóm Tác giả

MỤC LỤC

Chương 1: **PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN** 1

1.1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN 1

1.2 GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM HAI BIẾN 6

1.3 ĐẠO HÀM RIÊNG 9

1.4 VI PHÂN 10

1.5 ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP VÀ HÀM ẨN 14

1.6 ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN CẤP CAO 17

1.7 CÔNG THỨC TAYLOR 21

1.8 CỰC TRỊ 24

1.9 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT 30

1.10 ỨNG DỤNG CỦA HÀM NHIỀU BIẾN 33

Bài tập Chương 1 36

Chương 2: **TÍCH PHÂN BỘI** 45

2.1 TÍCH PHÂN HAI LỚP 45

2.2 TÍCH PHÂN BA LỚP 63

Bài tập Chương 2 81

Chương 3: **TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT** 87

3.1 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT 87

3.2 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI 97

3.3 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT 110

3.4 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI 114

Bài tập Chương 3 124

Chương 4: **PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN** 129

4.1 KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU.....129

4.2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT 131

4.3 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI 145

Bài tập Chương 4 159

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

Hình 1.1	Hình tròn đơn vị	Trang 2
Hình 1.2	Nửa mặt phẳng	Trang 2
Hình 1.3	Mặt phẳng	Trang 3
Hình 1.4	Nửa trên mặt nón	Trang 3
Hình 1.5	Paraboloid tròn xoay	Trang 4
Hình 1.6	Nửa trên mặt cầu	Trang 4
Hình 1.7	Mặt yên ngựa	Trang 4
Hình 1.8	Mặt trụ	Trang 4
Hình 1.9	Mặt trụ Paraboloid	Trang 4
Hình 2.1	Miền D đóng, bị chặn trong mặt phẳng	Trang 46
Hình 2.2	Hình thang cong loại 1	Trang 47
Hình 2.3	Hình thang cong loại 2	Trang 48
Hình 2.4	Miền D bất kỳ	Trang 48
Hình 2.5	Hai cách biểu diễn miền D của Ví dụ 2.1 a)	Trang 49
Hình 2.6	Hai cách biểu diễn miền D của Ví dụ 2.1 b)	Trang 50
Hình 2.7	Miền lấy tích phân có dạng hình thang cong loại 1	Trang 50
Hình 2.8	Miền lấy tích phân có dạng hình thang cong loại 2	Trang 51
Hình 2.9	Liên hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Descartes	Trang 54
Hình 2.10	Biểu diễn miền D trong tọa độ cực tổng quát TH1	Trang 55
Hình 2.11	Biểu diễn miền D trong tọa độ cực tổng quát TH2	Trang 55
Hình 2.12	Biểu diễn miền D trong tọa độ cực của Ví dụ 2.6	Trang 56
Hình 2.13	Biểu diễn miền D trong tọa độ cực của Ví dụ 2.7	Trang 56
Hình 2.14	Thể trụ	Trang 57
Hình 2.15	Biểu diễn của vật thể có hình chiếu D xuống mặt phẳng Oxy của ví dụ 2.9	Trang 59
Hình 2.16	Biểu diễn hệ trục tọa độ của Ví dụ 2.12	Trang 61
Hình 2.17	Thể trụ mở rộng	Trang 65
Hình 2.18	Biểu diễn miền V của Ví dụ 2.15	Trang 66
Hình 2.19	Biểu diễn miền V của Ví dụ 2.17	Trang 68

Hình 2.20	Biểu diễn miền V của Ví dụ 2.18	Trang 69
Hình 2.21	Hệ tọa độ trụ	Trang 71
Hình 2.22	Biểu diễn miền V của Ví dụ 2.21	Trang 73
Hình 2.23	Hệ tọa độ cầu	Trang 74
Hình 3.1	Biểu diễn định nghĩa tích phân đường	Trang 87
Hình 3.2	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.1	Trang 91
Hình 3.3	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.2	Trang 92
Hình 3.4	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.3	Trang 92
Hình 3.5	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.4	Trang 93
Hình 3.6	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.5	Trang 94
Hình 3.7	Đường đinh ốc	Trang 96
Hình 3.8	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.9	Trang 100
Hình 3.9	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.10a	Trang 101
Hình 3.10	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.10b	Trang 102
Hình 3.11	Miền đơn liên, Miền nhị liên, Miền tam liên	Trang 104
Hình 3.12	Đường Astroit	Trang 106
Hình 3.13	Minh họa trường hợp tích phân đường chỉ phụ thuộc điểm đầu và điểm cuối	Trang 108
Hình 3.14	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.14	Trang 109
Hình 3.15	Biểu diễn mặt lấy tích phân của Ví dụ 3.17	Trang 111
Hình 3.16	Biểu diễn mặt lấy tích phân của Ví dụ 3.18	Trang 113
Hình 3.17	Biểu diễn mặt lấy tích phân của Ví dụ 3.19	Trang 114
Hình 3.18	Lá Möbius	Trang 115
Hình 3.19	Biểu diễn mặt lấy tích phân của Ví dụ 3.20	Trang 118
Hình 3.20	Minh họa cho công thức Stokes	Trang 120
Hình 3.21	Biểu diễn đường lấy tích phân của Ví dụ 3.21	Trang 120
Hình 3.22	Biểu diễn mặt lấy tích phân của Ví dụ 3.22	Trang 122